Exercices et problèmes

13 Déterminer l'ensemble des couples (x, y) tels que $11x \equiv 99y \pmod{77}$.

14 1. Vérifier que $2015 \wedge 2007 = 1$.

2. Déterminer deux entiers a et b tels que $2007a + 2015b = 1$.

15 1. Vérifier que $391 \wedge 323 = 17$.

2. Déterminer deux entiers a et b tels que $391a - 323b = 17$.

3. En déduire une solution de $391a - 323b = 204$.

16 1. Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $97x + 11y = 1$.

2. Soit l'équation $(E) : 97x + 77y = 7$.

a. Donner une solution particulière de (E).

b. Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E).

17 On pose $u = 2 + \sqrt{3}$.

1. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u^n = a_n + b_n\sqrt{3}$, où a_n et b_n sont des entiers naturels.

b. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} à l'aide de a_n et b_n.

2. a. Montrer que $a_n{}^2 - 3b_n{}^2 = 1$ et $a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n = 1$.

b. En déduire que $a_n \wedge b_n = a_{n+1} \wedge a_n = b_{n+1} \wedge b_n = 1$.

18 Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ chacune des équations suivantes.

a. $7x - 14y = 5$. b. $5x - 10y = 10$. c. $29x + 58y = 3$.

19 Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ chacune des équations suivantes.

a. $(4x - 3y - 5)(4x + 3y - 1) = 0$. b. $x^2 - 9y^2 = 2$.

20 1. Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 13x - 8y = 1$.

2. On considère les triplets (x, y, z) de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ vérifiant le système $S : \begin{cases} 5x + y - 2z = 1, \\ 8x - 9y + 2z = 0. \end{cases}$

Montrer que si (x, y, z) est solution de S alors (x, y) est solution de (E). Résoudre S dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

21 1. Déterminer deux entiers u et v tels que $9u - 11v = 1$.

2. Soit a, b et x trois entiers. Montrer que si $x \equiv a \pmod{9}$ et $x \equiv b \pmod{11}$, alors $x \equiv 45b - 44a \pmod{99}$.

3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} x \equiv 6 \pmod{9}, \\ x \equiv 8 \pmod{11}. \end{cases}$

22 Pour tout entier n, on considère les nombres $a = 2n - 3$ et $b = 3n - 1$.

1. Quelles sont les valeurs possibles de $a \wedge b$?

2. a. Vérifier que pour tout n, le couple (a, b) est solution de l'équation $(E) : 3x - 2y = -7$.

b. Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E).

3. Déterminer l'ensemble des entiers n tels que $a \wedge b = 7$.

23 Soit p, q et u trois nombres premiers.

On pose n = pqu et on suppose que p–1, q–1 et u–1 divisent n–1.

Soit a un entier premier avec n.

1. Montrer que $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, $a^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$. et $a^{u-1} \equiv 1 \pmod{u}$.

En déduire les congruences $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{p}$, $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{q}$. et $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{u}$.

2. Montrer que $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$.

3. Décomposer 561 en produit de facteurs premiers et montrer que $224^{560} \equiv 1 \pmod{561}$.

4. Montrer que $561^{1728} \equiv 1 \pmod{1729}$.